

Càlculus

Annex 1

Quadrar: història



Taula

Els orígens; comparar abans que comptar	2
Quadrar: la primera acció	2
Altres activitats matemàtiques	2
Què entenem per cultura?	3
Els animals també compten	4
Tècniques per comparar o quadrar	5
Restes prehistòriques	8
L'os de Brassempouy	9
L'os d'Ishango	10
Resum	11

Els orígens; comparar abans que comptar

Les fonts arqueològiques o antropològiques no ens permeten contestar amb certesa a la pregunta de per què la humanitat es va posar a comptar. Per tant ens haurem de moure en el terreny de l'especulació o, més aviat, del raonament plausible. La majoria de llibres sobre història de la matemàtica eviten aquest tema. Un llibre divulgatiu de molt recent publicació s'inicia amb una frase tan agosarada com: "La història de les matemàtiques comença a l'any 532 aC, la data que assenyala el naixement del Pitàgores matemàtic"¹. És un cas exagerat però interessant perquè concentra algunes de les mancances d'altres títols semblants: eurocentrisme, ignorància o menysteniment de la matemàtica prèvia al formalisme grec, personalització... Altres títols inicien el seu estudi històric a partir dels primers documents arqueològics o escrits i passen més o menys ràpidament a la matemàtica egípcia o mesopotàmica. Però les preguntes sobre quines van ser les primeres activitats matemàtiques de la humanitat i quines motivacions les van causar queden encara enlaira.

La proposta de Boyer (1969; ed. 1999), un dels pocs autors que no defuig el tema, és que la *comparació* és una de les primeres activitats matemàtiques, i que les idees primigènies sobre aspectes com el nombre, la magnitud o la forma no es relacionen tant amb la recerca de semblances com en la de diferències: un-diversos, gran-petit, arrodonit-allargat. Podem pensar, seguint la línia apuntada per Boyer, que aquestes diferències es poden anar matisant progressivament: un-pocs-molts; petit-mitjà-gran, llarg-mitjà-curt, formes diferents... Aquests contrastos, aquestes observacions del que és distint, poden portar poc a poc a la recerca del que és semblant, quan es comencen a reconèixer qualitats o propietats comunes, com per exemple la unitat (un home, un arbre, un cavall...).

Quadrar: la primera acció

Està comprovat que qualsevol societat amb un mínim de desenvolupament tecnològic disposa d'algun mètode per comptar o *quadrar* (Gheverghese, 1996), entenent per "quadrar" qualsevol mètode que no impliqui pròpiament l'acció de comptar i serveixi per establir una correspondència biunívoca entre dues col·leccions d'objectes. En tot cas sembla lògic pensar que la qüestió de saber si hi ha "més", "menys" o "igual" sense necessitar de mesurar la quantitat o la diferència entre quantitats, és a dir, sense comptar, és una de les activitats primigènies de caràcter matemàtic que devien realitzar els primers humans, com a mínim entre les que tenen una relació més directa amb el nombre.

Altres activitats matemàtiques

Hem vist que la comparació és proposada per Boyer com una de les primeres accions amb sentit matemàtic realitzades per l'ésser humà. No és la única proposta. Des del terreny de l'etnografia, i més específicament, des de l'etnomatemàtica (Bishop, 1999) es proposa una llista de sis activitats matemàtiques que podem trobar a qualsevol cultura:

▪ ¹ BERLINSKI, DAVID (2006; pàgina 13): *Ascenso infinito*. Debate. Barcelona

- Comptar
- Mesurar
- Localitzar
- Dissenyar
- Jugar
- Explicar

Tothom es posarà ràpidament d'acord en que les quatre primeres són activitats clarament matemàtiques relacionades, sobre tot, amb els nombres i la geometria. Pot costar una mica més acceptar les dues últimes, però ho podrem fer si observem que *jugar* està relacionat amb l'acceptació de regles o amb l'estímul de la imaginació i que *l'explicar* implicar conceptes com la descripció, la justificació o el desenvolupament de llenguatges específics.

Aquestes activitats bàsiques semblen universals, en quant la majoria de cultures les desenvolupen, tot i que de formes i en graus diferents. Aquestes formes i aquests graus, quan ens referim als casos particulars de cada cultura, ens porten a l'acceptació, però, de que no hi ha una única matemàtica, la línia acceptada actualment per la comunitat científica o l'acceptada a nivell social, sinó que hi ha molts altres models matemàtics assentats en altres valors o altres necessitats concretes.

Tot i així, en aquest estudi, ens intentarem referir el més exclusivament que puguem a les relacionades amb el comptar, entenent el comptar com la mesura d'una quantitat.

Què entenem per cultura?

Donat que aquest terme es farà servir sovint al llarg d'aquest treball potser convé precisar quines són les idees fonamentals de cultura que aplicarem. La proposada per l'antropòleg Marvin Harris² és la següent:

"Cultura és el conjunt après de tradicions i estils de vida, socialment adquirits, dels membres d'una societat, incloent els seus modes pautats i repetitius de pensar, sentir i actuar (és a dir, la seva conducta)"

Una altra definició, no tan acadèmica ens la ofereix Maria Luisa Oliveras³ en un article sobre etnomatemàtiques:

"... cultura significa la forma de ser d'una comunitat, la forma d'interpretar el món i situar-se en ell, la cultura té a veure amb els valors, criteris de conducta, rols socials, és a dir, amb els elements canviants, dinàmics, d'explicació i interacció amb la realitat".

Una de les característiques de la cultura és el seu caràcter compartit, com destaca el matemàtic Ubiatan d'Ambrosio⁴. La cultura, entesa així, necessitarà de comunicació.

"Coneixements compartits, comportaments compatibilitzats i valors acordats sintetitzen el que s'entén per cultura. Així les maneres, estils, instruments, tècniques, en fi,

² HARRIS, MARVIN (1980, ed. de 1999): *Antropología cultural*. Alianza. Madrid. Pàgina 19.

³ OLIVERAS, M.L. (2006). *Etnomatemáticas. De la multiculturalidad al mestizaje*. (capítol 7 de *Matemáticas e interculturalidad*; DDAA (J.M. Goñi, coord. Graó. Barcelona. Pàgina 138)

⁴ d'AMBROSIO, U. (2003) *Tecnologias de informação e comunicação: reflexos na matemática e no seu ensino*

<http://vello.sites.uol.com.br/reflexos.htm>

les tecnologies de informació i comunicació, són essencials en el desenvolupament cultural i, com a conseqüència, de les civilitzacions.”

Però els nombres, el seu concepte, les seves representacions... tenen un alt contingut abstracte i simbòlic que ens fan ampliar les definicions anteriors amb una altra més que matisi aquests components:

Entenem per cultura aquest entramat de ritus, costums, idees, creences, signes i formes pròpies d'una societat en un moment històric donat. En altres paraules, la cultura és l'*humus* en el que ens desenvolupem, la matèria invisible que ens travessa i modela. Som, conseqüentment, éssers culturals. Sí, també som biologia i herència genètica, però, sobre tot, cultura, cultura simbòlica.

Manuel Alcalà (2002:21)

Els animals també compten

Quadrar dues quantitats al voltant de 4 o 5 elements no comporta excessives dificultats. Alguns animals tenen també la capacitat de “controlar” aquestes quantitats. Aquesta mena de control, que habitualment s'exerceix entre límits molt estrets es podria anomenar *percepció de la quantitat*. Hi ha experiments i observacions amb animals (Ifrah, 1997) que mostren aquesta capacitat en algunes espècies. És notori que la conducta d'una mare denota si sap si li falten una o més cries. També animals domèstics perceben l'absència d'algun objecte quotidià entre una petita col·lecció. Més sorprenent és la conducta d'algunes espècies de vespes que a la mateixa cavitat on col·loquen un ou hi dipositen una quantitat fixa (diferent per a cada espècie) d'erugues. Aquestes erugues serviran d'aliments a les seves larves quan neixin. Hi ha un cas, les del gènere *Eumenes*, que hi posen 5 erugues al costat dels ous dels que naixeran mascles i 10 si seran femelles. L'anècdota més referida, però, és la d'un experiment amb un corb que podia percebre quantitats fins a 4 o 5. Laversió narrada per l'historiador de les matemàtiques Tobias Dantzing al 1930 és la següent:

Un cavaller estava disposat a disparar a un corb que havia fet un niu a la torre del rellotge de la seva finca. Havia tractat de sorprendre l'ocell moltes vegades, però havia estat endebades: al moment que s'acostava, el corb abandonava immediatament el seu niu. Des d'un altre arbre esperava vigilant a que l'home abandonés la torre i així tornar-hi. Un dia, al cavaller se li va acudir una estratagema: dos homes van entrar en la torre, un va romandre dins, l'altre va sortir i se'n va anar. Però no van enganyar el pardal: es va mantenir allunyat fins que va sortir l'home que esperava dins. Va repetir l'experiment els dies següents amb dos, tres, fins a quatre homes, però sense èxit. Finalment, van ser enviats cinc homes: com a ocasions anteriors, tots van entrar a la torre i un va romandre dins mentre que els altres quatre van sortir i se'n van anar. Va ser llavors quan el corb va perdre el compte. Incapaç de distingir entre quatre i cinc, es va afanyar a tornar al seu niu.⁵

Alguns estudis més recents han observat que els corbs, de fet, arriben a comptar fins a set.⁶

⁵ Fragment obtingut de LIVIO, MARIO (2006): *La proporción áurea*. Ariel. Barcelona.

⁶ «The Brain of Birds», Laurence Jay Stettner y Kenneth A. Matyniak, *Scientific American*, juny de 1968

No serem menys i hem d'acceptar també una certa capacitat a l'ésser humà de percepció directa d'aquestes quantitats sense necessitat de comptar pròpiament.⁷

Tècniques per comparar o quadrar

Hem de continuar imaginant, a falta de proves més fermes, sobre els mètodes primitius que es podien fer servir per comparar o quadrar quantitats.

El procediment bàsic és la *correspondència membre a membre* dels dos conjunts que es volen comparar. Si d'un dels conjunts sobren membres, després de realitzar aquest aparellament, és que en té més. Si ni en sobren ni en falten hi ha els mateixos. Aquest tipus de "recompte sense comptar" encara el fem a diari. Per exemple, sabem si algun alumne/a falta a classe si observem una cadira buida. Tenim vestigis de totes les èpoques d'aquests procediments, alguns més documentats que altres. Començarem pels més recents que ens ajudaran a interpretar els més antics.

- a) **Rosaris.** A diferents religions, però molt especialment a la cristiana i a la musulmana, es fan servir rosaris que ajuden a fer el recompte de les oracions.

⁷ El neuròleg Oliver Sacks («L'home que va confondre la seva dona amb un barret»; Proa – Barcelona, 1998 pàg. 248) explica un cas excepcional de percepció de quantitats per part de dos germans autistes. El text és el següent:

«Una capsa de mistos que hi havia damunt de la seva taula va caure, i tot el seu contingut es va escampar per terra. «Cent onze!», van dir tots dos alhora; i llavors, en un murmuri, John va dir: «Trenta-set». Michael va repetir aquell número; John el va dir per tercera vegada i després es va aturar. Vaig comptar els mistos –vaig trigar una bona estona– i n'hi havia cent onze.

–Com s'ho han fet per comptar-los tan de pressa? –vaig dir.

–No els hem comptat pas –van contestar-. N'hem vist cent onze.

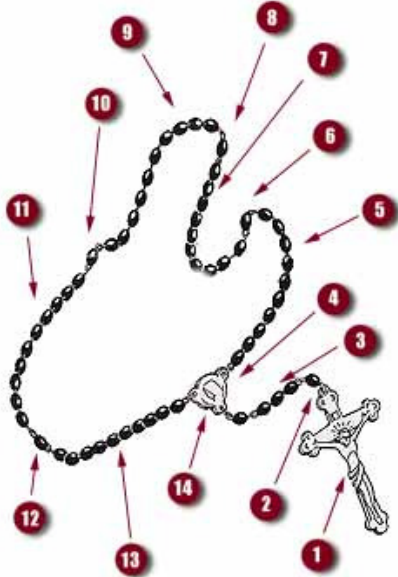

Unes anècdotes semblants s'expliquen del comte Zacharies Dase, el prodigi dels nombres, que instantàniament deia: «Cent vuitanta-tres!», o «Setanta-nou!», quan llençaven una pila de pèsols davant d'ell, i a continuació explicava amb penes i treballs (també era retardat mental) que no els comptava, sinó que veia el nombre com un tot, en un cop d'ull.

–I per què han dit «trenta-set» i ho han repetit tres vegades? –vaig preguntar als bessons.

I ells van respondre a l'uníson:

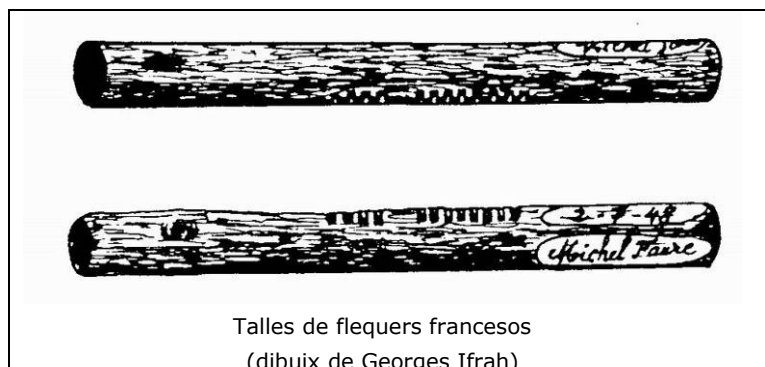
–Trenta-set, trenta-set, trenta-set, cent onze.”

Al film “Rain man” (1988) de Barry Levinson s'adapta aquesta escena quan el protagonista autista Raymond, interpretat per Dustin Hoffman, compta d'un cop d'ull 246 escuradents que han caigut repetint tres vegades, a més, el nombre 82; encara que la capsa era de 250 després es comprova que havien quedat 4 dins.

 <p>Rosari catòlic</p> <ul style="list-style-type: none"> - Té 59 denes (més la creu i el llaç); cada dena indica una oració - estan separades en grups; per exemple el grup 11 indica resar 10 vegades el grup d'oracions avemaria-glòria-jaculatòria, el 12 anunciar el 5è misteri i un parenostre i el 13 una altra tanda de 10 avemaries-glòria-jaculatòria. 	 <p>Rosari musulmà (<i>suhba</i>)</p> <ul style="list-style-type: none"> - té 33 denes - serveix per enunciar els 99 atributs d'Al·là (3 grups de 33)
--	--

b) **Talles.**

- a. A França, Alemanya, als països escandinaus... es feien servir pals amb marques, anomenats *talles*, per realitzar compres a crèdit. Segurament a Catalunya es feia servir un sistema semblant. Una possible prova és que el *Diccionari General de la Llengua Catalana de Pompeu Fabra* (edició 1980) reconeix aquesta accepció per l'entrada *talla*: "Bastó o canya dividit per la meitat longitudinal, en què es fa un tall per cada cosa d'un gènere que es compra a fiar, el venedor guardant-ne un tros i el comprador l'altre, i es confronten en el moment d'ajustar els comptes".



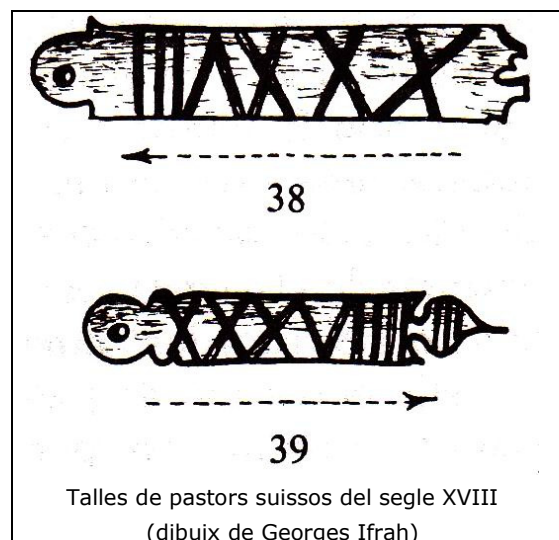
- b. A Anglaterra es va abolir a l'any 1826 el sistema de control del pagament d'impostos que feia servir osques més o menys profundes sobre pals de fusta. Les quantitats pagades (100 lliures, 1000 lliu-

res...) eres representades amb diferents gruixos de l'osca corresponent.



Talles angleses del segle XVIII

- c. A molts països europeus els pastors, fins fa poques generacions, portaven el recompte de caps de bestiar amb pals o planxes de fusta.



Talles de pastors suïssos del segle XVIII
(dibuix de Georges Ifrah)

Aquest mètodes es remunten a temps immemorials i els trobem arreu del món. Es podrien posar exemples de tots el continents. A la Xina l'ideograma corresponent a la paraula *contracte* està format per la combinació dels que representen un pal tallat i un ganivet. En àrab l'arrel del verb *farada* té tan el significat de "fer osques" com el de "dividir en parts iguals".

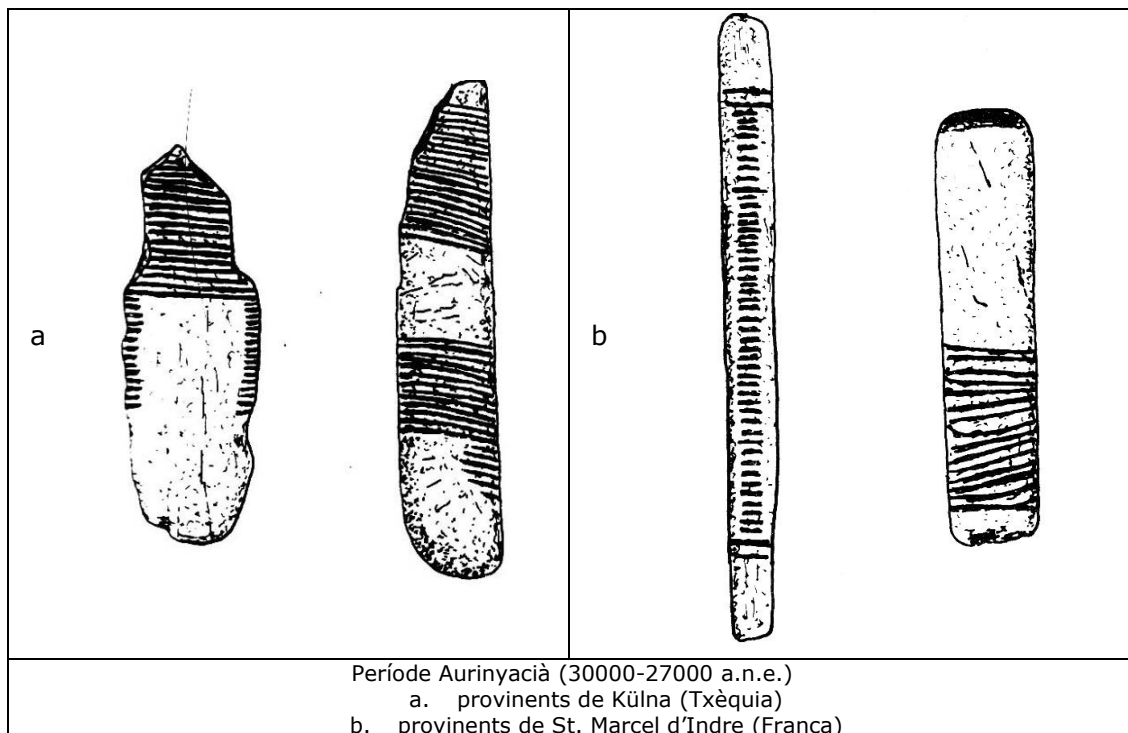
契

Restes prehistòriques

A la vista dels exemples anteriors podem interpretar algunes restes arqueològiques trobades arreu del món com "marcadors" de diferents tipus. Es tracta, majoritàriament, d'ossos i pals amb osques, moltes vegades agrupades de diferents maneres. Uns dels exemples d'origen més recent són els ossos trobats als jaciments del riu Brazos a Texas. Estan datats de fa uns 5000 anys i es pensa que tenien alguna funció ordenadora en determinats rituals.



N'hi ha molts exemples de restes trobades a Europa. Georges Ifrah (1987) en dibuixa alguns als seus llibres.



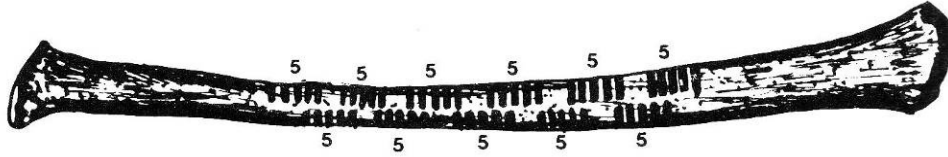
Període Aurinyacià (30000-27000 a.n.e.)

a. provinents de Kùlna (Txèquia)

b. provinents de St. Marcel d'Indre (França)

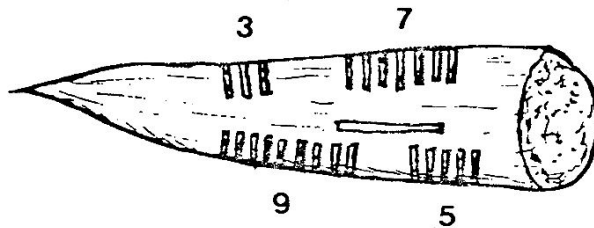
Potser els més interessants, i que donen més joc a fer hipòtesis de diferents tipus (algunes de molt especulatives), són els que presenten determinades agrupacions d'osques. Vegem alguns exemples.

- **L'os de llop de Dolni Vestonice** (Txèquia) (Període Aurinyacià) . Presenta un interessant agrupament d'osques de 5 en 5. Sembla un intent d'agrupament fent servir una base numèrica.



Dibuix G. Ifrah

- **L'os trobat a Brassempouy** (França) (Període Magdelanià, 15000-11000 a.n.e.) amb 4 grups d'osques (3-7-5-9)



Dibuix G. Ifrah

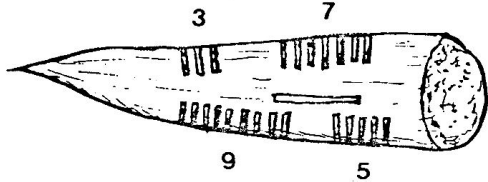
- **L'os d'Ishango** (Congo) (Període Gravetià, 27000-20000 a.n.e.), té uns 10 cm de llarg i presenta 3 fileres d'agrupacions numèriques. Segurament la resta que més literatura ha generat.



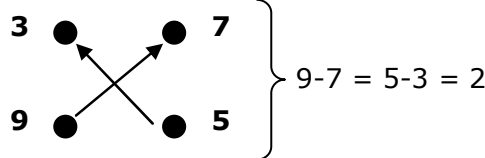
L'os de Brassempouy

En gran part les matemàtiques consisteixen en la recerca de pautes, de regularitats, estructures... patrons, en definitiva. Per tant és temptador posar-se a pensar quins són els patrons amagats als quatre grups numèrics de l'os tallat de Brassempouy. Seguim les propostes que ens fa Ifrah (1997)

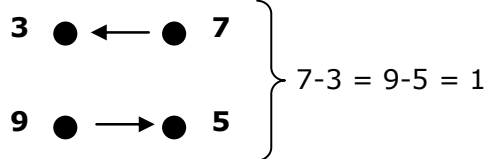
- Són els quatre primers nombres senars després de la unitat.



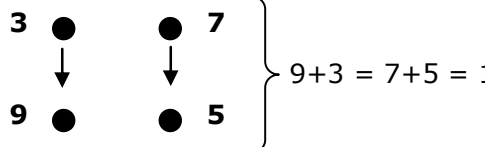
- Diagonalment la diferència és 2



- Horitzontalment la diferència és 4



- Verticalment la suma és 12

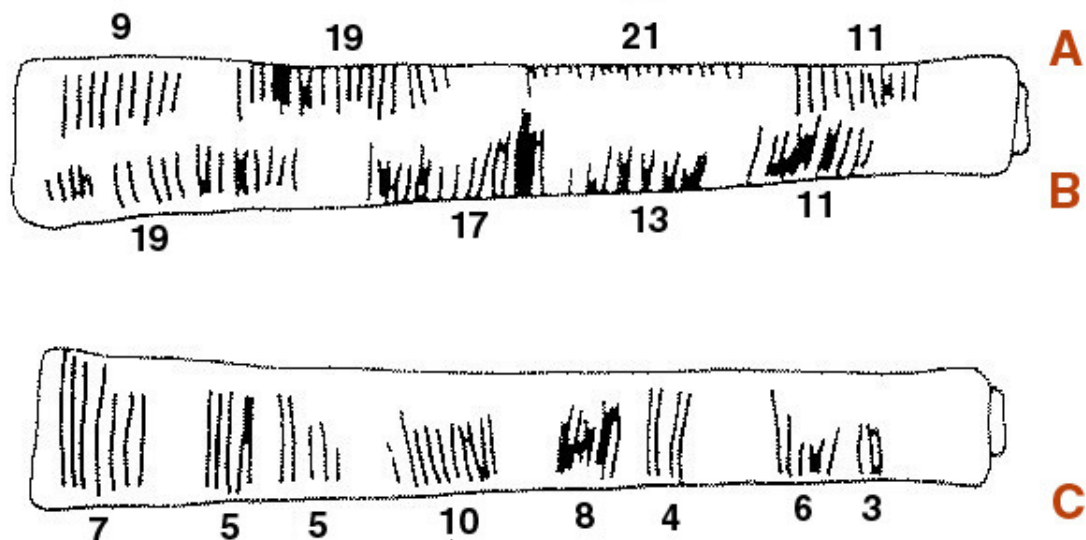


Tot i així el mateix autor proposa diferents exemples sobre un ús més probable: una mena de cens. Un exemple amb eines, que justificaria la divisió en grups a partir del material del que estan fets, és el següent:

- 3 burins i 7 ganivets (de pedra)
- 9 rascadors i 5 taladres (d'os)

L'os d'Ishango

Aquest os de babuí, conservat al Museu de les Ciències Naturals de Brussel·les, va ser trobat per Jean d'Heinzelin a l'any 1950 prop del Llac Edouard (República Democràtica del Congo). Presenta tres línies amb diferents agrupacions de marques.



Si mirem els nombres de cada sèrie podem fer algunes observacions:

- Sobre la fila A
 - els primer parell de nombres, 9 i 19, estan una unitat per sota de les dues primeres desenes (10 i 20)
 - el segon parell, 21 i 11, estan una unitat per sobre de les mateixes desenes
 - podem fer dues parelles de suma 30: $9+21$ i $19+11$
- Sobre la fila B
 - la formen els quatre nombres primers existents entre 10 i 20
 - estan ordenats
 - tenim dos parells de suma 30: $17+13$ i $19+11$
- Sobre les files A i B
 - Totes dues sumen 60
- Sobre la fila C
 - Hi ha tres parelles de nombre fetes per una quantitat i el seu doble: 3-6, 4-8 i 5-10
 - Hi ha tres nombres primers, el 3, el 5 i el 7, que podrien estar lligats amb la sèrie de la fila B

Aquesta llista és la de les observacions més clàssiques que s'han fet sobre les quantitats d'osques que apareixen a l'os d'Ishango, però segur que en podem trobar més per poc que busquem.

Quina funció acomplien? La teoria més acceptada (Gheverghese, 1996) és que les marques estan relacionades amb algun tipus de calendari lunar que podria complir funcions relacionades amb l'economia de caça o agrícola o amb esdeveniments de tipus ritual o cerimonial. Estudis més atents sobre la profunditat de les marques i altres observacions fetes amb microscopi semblen reforçar aquesta teoria.

Resum

Abans de realitzar accions de més depuració matemàtica, com pot ser la de comptar pròpiament o la realització de càlculs, la humanitat va realitzar-ne algunes de més simples com la comparació per l'establiment de diferències i, posteriorment, de semblances. Un dels tipus de comparacions devia ser el relatiu a les quantitats a un nivell de "més-menys-igual". En quantitats molt petites (entre 1 i 5) sembla haver-hi una mena de percepció natural també present en algunes espècies animals. Per establir aquestes comparacions amb quantitats més grans, el mètode més usual devia ser la comparació biunívoca "membre a membre". Restes arqueològiques d'ossos i fustes tallades amb grups d'osques organitzats de diferents maneres, fan pensar que es tractaven d'instruments per realitzar aquestes comparacions.